Una generalización a $\mathbb{R}^n$ del producto vectorial definida en la intersección de dos subespacios afines

A generalization to $\mathbb{R}^n$ of the vector product defined at the intersection of two affine subspaces

DOI: 10.46932/sfjdv2n2-022

Received in: January 1st, 2020

Accepted in: March 30th, 2020

Uribe Gonzalez Fernando Baldemar

Dirección: Cda Milagros sn, Santa Rita, Tutltepec

E-mail: baldemar17@gmail.com

RESUMEN

En este trabajo se propone observar en qué condiciones dos subespacios L y S en $\mathbb{R}^n$, de dimensiones 1 y $n - 2$, traslados del origen, i.e., subespacios afines, se intersectan. De una condición necesaria y suficiente para que exista dicha intersección se define el producto cruz o producto vectorial en este espacio vectorial. A su vez, la demostración devela un nuevo método en la resolución de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas.

Palabras Clave: Determinantes, producto vectorial, recta, subespacios afines, triple producto escalar.

ABSTRACT

In this paper we propose to observe under what conditions two subspaces L and S in $\mathbb{R}^n$, of dimensions 1 and $n-2$, translations of the origin, i.e., affine subspaces, intersect. From a necessary and sufficient condition for such intersection to exist, the cross product or vector product in this vector space is defined. In turn, the demonstration unveils a new method in the resolution of a system of n equations with n unknowns.

Keywords: Determinants, vector product, line, affine subspaces, triple scalar product.

1 INTRODUCCIÓN

Se define una recta L como el conjunto de puntos a los que se puede llegar desde un punto P fijo en el espacio $\mathbb{R}^n$ a través del alargamiento de un vector directriz α_1 , cuyo estiramiento que se hace mediante un factor de expansión t_1 o parámetro de la recta. En el mismo sentido hablamos de un subespacio afín S de dimensión $n - 2$, el cual tiene $n - 2$ vectores directrices e igual número de factores de expansión. Se propone definir el producto vectorial a partir de la condición necesaria y suficiente para que se cumpla la siguiente **proposición**: *La intersección de los subespacios afines L y S existe si y sólo si existe al menos una de las intersecciones de esos subespacios proyectados sobre algún hiperplano canónico y estas son coincidentes en sus factores de expansión, siempre que los vectores directrices de los subespacios sean linealmente independientes.* (1)

Al interceptar estos subespacios o sus proyecciones se espera, en primera instancia, que los subespacios afines no tengan intersección vacía o que se superpongan, de ahí que pedir que los vectores directrices sean linealmente independientes. Se hará la demostración de esta proposición por medio de inducción matemática con n mayor o igual a tres por lo que se demostrará la proposición (1) y se definirán el producto cruz (PV), el triple producto escalar (TPE) y se demostrarán sus propiedades de ortogonalidad, anticommutatividad y de ciclo del TPE respectivamente. Una demostración más completa incluye demostrar propiedades de los determinantes a partir de cómo se define el TPE aquí, pero se tomarán como dadas.

2 METODOLOGÍA

2.1 INTERSECCIÓN DE SUBESPACIOS

Notación. Para una matriz A de $n \times n$ con entradas en los reales, se denotará el j -ésimo elemento de la columna i de la matriz como $[A]_{ji} = \alpha_{ij}$, es decir, como la j -ésima coordenada del vector α_i en $\mathbb{R}^n$.

Sea $E_i := \text{gen}\{e_j, 1 \leq j \leq n, j \neq i\}$ el subespacio generado por los vectores canónicos, es decir, el hiperplano canónico que no incluye al vector e_i . Se define la proyección de un vector v en el hiperplano E_i como la suma de las proyecciones del vector en la dirección de los vectores directrices del subespacio: $P_{E_i}(v) := \sum_{j \neq i}^n \text{Proy}_{e_j} v$ (2).

Sean $S = \{Q + t_2 \alpha_2 + \cdots + t_{n-1} \alpha_{n-1} \mid t_i \in \mathbb{R}, 2 \leq i \leq n-1\}$ un subespacio afín de dimensión $n-2$ y $L = \{P + t_1 \alpha_1 \mid t_1 \in \mathbb{R}\}$ una recta en $\mathbb{R}^n$.

La intersección de los subespacios implica, sin pérdida de la generalidad, que;

$$t_1 \alpha_1 + \cdots + t_{n-1} \alpha_{n-1} = P - Q = y \quad (3)$$

Para comenzar la demostración de la proposición, se distinguen dos casos triviales. Cuando $P = Q$ y cuando estos puntos son linealmente dependientes de sus respectivos vectores directrices. En el primer caso si $P = Q$ entonces (3) lleva a que $t_1 \alpha_1 + \cdots + t_{n-1} \alpha_{n-1} = P - Q = 0$, al ser los vectores α_i linealmente independientes entonces $t_i = 0$, por lo que la intersección de los subespacios es el punto P . En el segundo caso, si los puntos son linealmente dependientes de sus respectivos vectores directrices, se pueden expresar como $P = s_1 \alpha_1$ y $Q = s_2 \alpha_2 + \cdots + s_{n-1} \alpha_{n-1}$, entonces, al interceptar los subespacios se tiene, por ejemplo, $s_1 = -t_1$ y por lo tanto, la intersección de los subespacios es el origen del espacio vectorial.

Para el resto de los casos, nótese que al proyectar una combinación lineal $y = t_1 \alpha_1 + \cdots + t_{n-1} \alpha_{n-1}$ sobre alguno de los hiperplanos E_i , la coordenada i -ésima del vector α_j se hace cero. Se denota

la ecuación vectorial resultante de dicha proyección en cualquiera de los hiperplanos canónicos como

$$y' = t_1 \alpha'_1 + \cdots + t_{n-1} \alpha'_{n-1} \quad (4)$$

De las ecuaciones paramétricas de (3) y (4) se observa que cualquier conjunto de soluciones, $\{t_i\}_{i=1}^{n-1}$, que satisface (3) satisface también (4) por lo que se cumple un sentido de la proposición.

Recíprocamente, se hará a continuación, la prueba del sentido inverso de la proposición mediante inducción matemática con m mayor o igual a tres. Además, se tomará como punto de partida la proyección en el subespacio E_m y bajo el orden de las proyecciones en $E_m, E_1, \dots, E_{m-1}$.

A.1 Primera condición, m igual a 3

En este caso S es una recta, se tienen los conjuntos; $L = \{P + t_1 \alpha_1 | t_1 \in \mathbb{R}\}$ y $S = \{Q + t_2 \alpha_2 | t_2 \in \mathbb{R}\}$

Cuya intersección de los subespacios proyectados sobre el hiperplano E_3 lleva la expresión (4) al sistema (expresado en su forma matricial);

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema, las soluciones son:

$$t_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}}, -t_2 = -\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}}$$

para verificar si estas soluciones satisfacen el sistema original se sustituyen en la tercera ecuación paramétrica de (3): $t_1 \alpha_{13} + t_2 \alpha_{23} = y_3$. Al efectuar esta sustitución surge la conclusión de que existe la intersección si el siguiente producto punto es cero,

$\langle (y_1, y_2, y_3), (\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{22}\alpha_{13}, \alpha_{13}\alpha_{21} - \alpha_{23}\alpha_{11}, \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}) \rangle \quad (5)$. Obsérvese que, moviendo los subíndices en el ciclo, $\alpha_{i1} \rightarrow \alpha_{i2} \rightarrow \alpha_{i3} \rightarrow \alpha_{i1}$ simultáneamente con $y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow y_3 \rightarrow y_1$ uno a la vez en cada uno de los pasos anteriores da como resultado las soluciones del sistema de ecuaciones asociado a cada proyección de los subespacios sobre los hiperplanos canónicos E_i en el orden planteado inicialmente y por tanto cada vez emerge la misma condición y conclusión. Esto implica que con cada una de las soluciones de cada subsistema se pueden reconstruir las de los otros siempre que el producto (4) sea cero y por lo tanto se cumple que las rectas proyectadas coinciden en sus factores de

expansión. Por ahora, supongamos que existe la intersección, es decir, es no vacía ni se superponen los subespacios, en todas las proyecciones sobre E_i .

A.1.1 Producto vectorial (PV)

El segundo vector de la ecuación (5) se define como el producto vectorial de los vectores directrices de las rectas.

$$\alpha_1 \times \alpha_2 = (\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{22}\alpha_{13}, \alpha_{13}\alpha_{21} - \alpha_{23}\alpha_{11}, \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{vmatrix}$$

Que es nuestro objetivo.

Entonces (4) queda como $(P - Q) \cdot \alpha_1 \times \alpha_2 = 0$ (6). En este punto se puede replantear la proposición (1) como: **Proposición**; La intersección de los subespacios afines L y S existe si, y solo si el ángulo del vector producto vectorial, de los vectores directrices de las rectas, con la diferencia de cualesquiera dos puntos sobre las rectas es un ángulo recto, siempre que los vectores directrices de los subespacios sean linealmente independientes. Además, la intersección de los subespacios coincide con la de sus proyecciones sobre los hiperplanos canónicos en sus factores de expansión. (7)

Expresando las ecuaciones paramétricas de (2) en forma matricial, sabemos que el rango de filas de la matriz asociada es igual al rango de columnas de dicha matriz, el cual es dos, expresando, por ejemplo, la tercera fila en función de las dos primeras tenemos la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} \\ \sum_{k=1}^2 c_k \alpha_{1k} & \sum_{k=1}^2 c_k \alpha_{2k} \end{bmatrix}$$

Como se estableció al inicio, cada columna corresponde a un vector α_1 y α_2 . Tomando $\beta = \alpha_1 \times \alpha_2 = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ como el resultado del producto vectorial asociado a la matriz del lado izquierdo, podemos expresar el producto vectorial asociado a la matriz derecha como: $\alpha_1 \times \alpha_2 = (-c_1\beta_3, -c_2\beta_3, \beta_3)$ por lo que se concluye que basta con que β_3 sea distinto de cero, para que el vector producto vectorial sea distinto de cero, resultando los vectores linealmente independientes, y por ende solo es necesario que exista la intersección en alguna de los subespacios proyectados. Con esto concluye la demostración para m igual a tres de la proposición, pero para generalizar este resultado es necesario, definir los siguientes conceptos y demostrar algunas de sus propiedades.

A.1.1.1 Ortogonalidad del PV

Para demostrar que el vector $\alpha_1 \times \alpha_2$ es ortogonal a ambos vectores, tomando dos puntos P' y Q' sobre los subespacios afines L y S tales que $t_1=1$ y $t_2=0$ resulta de (6) que $0 = (P' - Q') \cdot \alpha_1 \times \alpha_2 = (P + \alpha_1 - Q) \cdot \alpha_1 \times \alpha_2$

$= (P - Q) \cdot \alpha_1 \times \alpha_2 + \alpha_1 \cdot \alpha_1 \times \alpha_2 = 0 + \alpha_1 \cdot \alpha_1 \times \alpha_2$, entonces, $\alpha_1 \cdot \alpha_1 \times \alpha_2 = 0$, de igual manera para $t_1=0$ y $t_2=1$ se prueba que $\alpha_2 \cdot \alpha_1 \times \alpha_2 = 0$. Más aún, sustituyendo ahora cualesquiera dos puntos P'' y Q'' se tiene

$(P'' - Q'') \cdot \alpha_1 \times \alpha_2 = 0 + s_1 \alpha_1 \cdot \alpha_1 \times \alpha_2 + s_2 \alpha_2 \cdot \alpha_1 \times \alpha_2 = 0 + s_1 0 + s_2 0 = 0$. Por lo que el producto vectorial es simultáneamente ortogonal a los vectores directrices de las rectas, así como para el subespacio afín generado a partir de la intersección de los subespacios L y S .

A.1.1.2 Anticommutatividad del PV

Probar la propiedad $\alpha_1 \times \alpha_2 = -\alpha_2 \times \alpha_1$ es como sigue:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \times \alpha_2 &= (\alpha_{22}\alpha_{13} - \alpha_{12}\alpha_{23}, \alpha_{11}\alpha_{23} - \alpha_{21}\alpha_{13}, \alpha_{21}\alpha_{12} - \alpha_{22}\alpha_{11}) \\ &= -(\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{22}\alpha_{13}, \alpha_{21}\alpha_{13} - \alpha_{11}\alpha_{23}, \alpha_{22}\alpha_{11} - \alpha_{21}\alpha_{12}) = -\alpha_2 \times \alpha_1 \end{aligned}$$

A.1.2 Triple producto escalar (TPE)

Ahora se define el producto punto de un tercer vector con un vector producto vectorial como el triple producto escalar.

$$\det[\alpha_3 \alpha_1 \alpha_2]^t = \alpha_3 \cdot \alpha_1 \times \alpha_2 \quad (8)$$

donde el exponente t indica que los vectores están a lo largo de las líneas del determinante, que es en forma transpuesta de la representación matricial de la combinación lineal de los vectores. Este producto tiene una propiedad cíclica (9)

$$\det[\alpha_3 \alpha_1 \alpha_2]^t = \alpha_3 \cdot \alpha_1 \times \alpha_2 = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \times \alpha_3 = \det[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]^t.$$

Para demostrar la propiedad, véase que

$$\begin{aligned} \det[\alpha_3 \alpha_1 \alpha_2]^t &= \alpha_3 \cdot \alpha_1 \times \alpha_2 = \\ &\alpha_{31}(\alpha_{12}\alpha_{23} - \alpha_{22}\alpha_{13}) + \alpha_{32}(\alpha_{13}\alpha_{21} - \alpha_{23}\alpha_{11}) + \alpha_{33}(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{21}\alpha_{12}) \\ &= \alpha_{31} \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12}\alpha_{23} & -\alpha_{13}\alpha_{22} \\ \alpha_{11}\alpha_{23} & +0 & -\alpha_{13}\alpha_{21} \\ \alpha_{11}\alpha_{22} & -\alpha_{12}\alpha_{21} & +0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sumando por columna y factorizando los α_{1i} se llega a la expresión deseada. Lo cual es $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \times \alpha_3 = \det[\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3]^t$. De este modo se define el determinante de una matriz A de 3×3 a partir del TPE y se pueden demostrar sus propiedades. Una prueba completa de la proposición incluye la demostración de las propiedades de los determinantes mediante el TPE, pero en este trabajo se tomarán como demostradas.

A.1.4 Triple producto vectorial (TPV)

Se define el producto vectorial de un tercer vector con el vector resultante del producto vectorial como $\alpha_3 \times (\alpha_1 \times \alpha_2)$ el cual tiene la propiedad.

$$\alpha_3 \times (\alpha_1 \times \alpha_2) = \alpha_1(\alpha_2 \cdot \alpha_3) - \alpha_2(\alpha_3 \cdot \alpha_1)$$

Usar el símbolo de determinantes para tener una expresión abreviada del producto vectorial se considera un abuso de notación, consecuentemente con esto se puede usar ese mismo símbolo para definir la regla de expulsión del TPV de la forma $\alpha_3 \times (\alpha_1 \times \alpha_2) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_3 \cdot \alpha_1 & \alpha_2 \cdot \alpha_3 \end{vmatrix}$. Que es muy útil para demostrar que el determinante del producto de matrices es igual al producto del determinante de las matrices.

A.2 Segunda Condición y demostración para $m = n$

La segunda condición en la demostración por inducción matemática es, ahora, suponer que se cumplen la proposición (1) o su replanteamiento (6), que se ha definido del producto vectorial (PV) y el triple producto escalar (TPE), la propiedad de Anticommutatividad del PV y de ciclo del TPE, así como las propiedades de los determinantes usando el TPE en $\mathbb{R}^{n-1}$ y demostraremos que se cumplen para $\mathbb{R}^n$,

Retomando (1) y (2), se tiene para $\mathbb{R}^n$ que la proyección de los subespacios afines L y S en el hiperplano E_n la ecuación vectorial de la intersección es;

$$y' = t_1 \alpha'_1 + \cdots + t_{n-1} \alpha'_{n-1} \quad (10)$$

Las comillas indican que son los vectores sin la n -ésima entrada, i.e., queda en un subespacio de dimensión $n - 1$, lo cual es una representación de un sistema de ecuaciones de $n - 1 \times n - 1$, supóngase de rango completo, como en el caso de tres dimensiones. De este modo (8) tiene asociada una matriz cuadrada de rango $n - 1$ al expresarse en forma paramétrica. Para hallar las incógnitas, parámetros o factores de expansión, expresamos (10) como si fuera la intersección de dos subespacios afines, L' y S' ,

de dimensiones 1 y $(n - 1) - 2$ mediante la exclusión de uno de los factores de expansión de la forma, $\sum_{k \neq i}^{n-1} t_k \alpha_k = y - t_i$. Aplicando la condición (6), bajo el supuesto de independencia lineal, el producto vectorial de los $(n - 1) - 1$ vectores cumple que si $\beta = \times_{k=1}^{n-2} \alpha_k \neq 0$ y $\beta \cdot (y - t_i \alpha_i) = 0$, entonces se cumple la proposición (7), pero más importante es que;

$$\begin{aligned} \beta \cdot (y - t_i \alpha_i) = 0 &\Leftrightarrow \beta \cdot y - t_i \beta \cdot \alpha_i = 0 \\ &\Leftrightarrow \\ t_i &= \frac{\beta \cdot y}{\beta \cdot \alpha_i} = \frac{\det[y \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{n-2}]^t}{\det[\alpha_i \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{n-2}]^t} \end{aligned}$$

que es la regla de Cramer para la i -ésima solución del sistema asociado a (2).

Se define el triple producto escalar (TPE) en $\mathbb{R}^{n-1}$ como

$$\det[\alpha_i \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{n-1}]^t = \alpha_i \cdot \alpha_1 \times \cdots \times \alpha_{i-1} \times \alpha_{i+1} \times \cdots \times \alpha_{n-1}$$

la t indica que el determinante esta transpuesto, i.e., las entradas de los vectores están a lo largo de las filas del determinante. Asumiendo que el TPE en $\mathbb{R}^{n-1}$ cumple la propiedad de ciclo (9);

$$\det[\alpha_{n-1} \alpha_1 \cdots \alpha_{n-2}]^t = (-1)^{(n-1)+1} \det[\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}]^t.$$

En conjunto con la propiedad de Anticommutatividad del PV, el denominador resulta;

$$\det[\alpha_i \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{n-2}]^t = (-1)^{i+1} \det[\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}]^t$$

entonces en la i -ésima solución se tiene

$$t_i = (-1)^{i+1} \frac{\det[y \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{n-2}]^t}{\det[\alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}]^t}$$

Ya que solo falta la n -ésima entrada en los vectores del denominador, denotándolo como D_n , entonces

$$t_i = (-1)^{i+1} \frac{\det[y \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \cdots \alpha_{n-2}]^t}{D_n}$$

desarrollando el numerador por medio de la primera línea;

$$t_i = (-1)^{i+1} \frac{\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} y_j D_{ij}}{D_n}$$

los subíndices en el determinante D_{ij} indican que la i -ésima solución no contiene el vector i (fila), ni la j -ésima coordenada de los vectores (columna).

Las soluciones anteriores resuelven el subsistema proyectado en E_n , pero sus ecuaciones coinciden con las primeras $n - 1$ ecuaciones paramétricas de (2) por lo que resuelven también este sistema si sustituyéndolas en la última ecuación, está se resuelve. Haciendo dicha sustitución;

$$t_1 \alpha_{1n} + t_2 \alpha_{2n} + \dots + t_{n-1} \alpha_{n-1n} = y_n$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{i+j} y_j D_{ij} \alpha_{in} = y_n D_n$$

Expresando la suma anterior como el producto de dos vectores y usando la notación de Einstein

$$\langle (-1)^{1+i} \alpha_{in}, \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{1+j} y_j D_{ij} \rangle - y_n D_n = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{1+j} y_j \langle (-1)^{1+i} \alpha_{in}, D_{ij} \rangle - y_n D_n = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{j+1} y_j \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} \alpha_{in} D_{ij} - y_n D_n = 0$$

donde las sumas sobre $(-1)^{i+1} \alpha_{in} D_{ij}$ es el desarrollo por la primera columna de un determinante con todos los $n - 1$ vectores pero que no tiene la coordenada j . Además, la primera columna la ocupa la n -ésima entrada de los vectores por lo que usando la propiedad de ciclo del TPE en este espacio y, permitiendo el abuso de notación, la suma es igual a $(-1)^{n-1+1} D_j$, de donde la expresión anterior queda:

$$(-1)^{1+1} y_1 D_1 + \dots + (-1)^{1+n-1} y_{n-1} D_{n-1} + (-1)^{1+n} y_n D_n = 0$$

la cual se puede expresar como el producto punto de los vectores:

$$(y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) \cdot ((-1)^{1+1}D_1, \dots, (-1)^{1+n-1}D_{n-1}, (-1)^{1+n}D_n) = 0 \quad (11)$$

es decir, existe la intersección de los subespacios afines L y S en esta proyección si se cumple la condición anterior. Obsérvese que moviendo los subíndices en el ciclo, $\alpha_{i1} \rightarrow \alpha_{i2} \rightarrow \dots \rightarrow \alpha_{in} \rightarrow \alpha_{i1}$ simultáneamente con $y_1 \rightarrow y_2 \rightarrow \dots \rightarrow y_n \rightarrow y_1$ uno a la vez en cada uno de los pasos anteriores da como resultado las soluciones del sistema de ecuaciones asociado a cada proyección de los subespacios sobre los hiperplanos canónicos E_i en el orden planteado inicialmente y por tanto cada vez emerge la misma condición y conclusión.

A.2.1. Producto Vectorial para n dimensiones.

Como en el caso de tres dimensiones se define el producto vectorial en este espacio vectorial como:

$$\times_{i=1}^{n-1} \alpha_i = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n-11} & \alpha_{n-12} & \cdots & \alpha_{n-1n} \end{vmatrix}$$

$$= ((-1)^{1+1}D_1, \dots, (-1)^{1+n-1}D_{n-1}, (-1)^{1+n}D_n)$$

Con esto queda demostrado que los subespacios se intersectan si y solo si sus proyecciones sobre los subespacios E_i se intersectan y además coinciden en sus factores de expansión. De nuevo, supongamos, por el momento, que existe la intersección en todas las proyecciones.

A.2.2. Replanteamiento intersección de subespacios

Dada la definición del producto vectorial que se acaba de hacer, se puede replantear la proposición inicial como **proposición**; la intersección de los subespacios afines L y S existe si, y solo si el ángulo del vector producto vectorial, de los vectores directrices de las rectas, con la diferencia de cualesquiera dos puntos sobre las rectas es un ángulo recto, siempre que los vectores directrices de los subespacios sean linealmente independientes. Además, la intersección de los subespacios coincide con la de sus proyecciones sobre los hiperplanos canónicos en sus factores de expansión. (6), i.e., dados los subespacios

$$S = \{t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2 + \dots + t_{n-2}\alpha_{n-2} | t_i \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n-2\}$$

y

$$L = \{Q + t_{n-1}\alpha_{n-1} | t_{n-1} \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{si } \beta = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \neq 0, \text{ entonces } \exists S \cap L \Leftrightarrow \beta \cdot (Q - P) = 0$$

$$\{t_j\} \in \{P_{E_i}(S \cap L)\}, \text{ para algún } j \in \{1, \dots, n-2\}, i \in \{1, \dots, n-1\}$$

De nuevo, expresando la intersección de L y S en términos de matrices esta queda como un arreglo de $n \times (n-1)$ y dado que el espacio generado por las columnas de esta matriz tiene $n-1$ vectores linealmente independientes, entonces el espacio de renglones debe ser igual ([pág. 72] [Hoffman]). De esta manera, expresando la última línea como combinación de las anteriores de la forma.

$$t_1 \sum_{j=1}^{n-1} c_j \alpha_{1j} + \dots + t_{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} c_j \alpha_{1j} = y_n$$

De modo que la i -ésima componente del vector producto vectorial de esos vectores, queda como

$$\beta_i = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1i-1} & \alpha_{1i+1} & \dots & \sum_{j=1}^{n-1} c_j \alpha_{1j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{n-11} & \dots & \alpha_{n-1i-1} & \alpha_{n-1i+1} & \dots & \sum_{j=1}^{n-1} c_j \alpha_{1j} \end{vmatrix}$$

Aplicando la propiedad $\det(A) = \det(A^t)$, que para esta demostración suponemos que se cumple para el orden $n-1$.

Haciendo, también, que las componentes de las filas de este determinante correspondan con las entradas de los vectores

α_i^t , entonces el determinante anterior se puede expresar como el TPE de orden $n-1$ de tal forma que

$$\begin{aligned}
 \beta_i &= (-1)^{i+1} \alpha_1^t \cdot \left(\alpha_2^t \times \cdots \times \alpha_{i-1}^t \times \alpha_{i+1}^t \times \cdots \times \sum_{j=1}^{n-1} c_j \alpha_j^t \right) \\
 &= (-1)^{i+1} (-1)^{(n-1)+1} \left(\sum_{j=1}^{n-1} c_j \alpha_j^t \right) \cdot (\alpha_1^t \times \cdots \times \alpha_{i-1}^t \times \alpha_{i+1}^t \times \cdots \times \alpha_{n-1}^t) \\
 &= (-1)^{i+1} (-1)^{(n-1)+1} \sum_{j=1}^{n-1} (c_j \alpha_j^t \cdot \alpha_1^t \times \cdots \times \alpha_{i-1}^t \times \alpha_{i+1}^t \times \cdots \times \alpha_{n-1}^t) \\
 &= (-1)^{i+1} (-1)^{(n-1)+1} c_i \alpha_i^t \cdot \alpha_1^t \times \cdots \times \alpha_{i-1}^t \times \alpha_{i+1}^t \times \cdots \times \alpha_{n-1}^t \\
 &= (-1)^{i+1} (-1)^{(n-1)-(i+1)+1} c_i \alpha_1^t \cdot \alpha_2^t \times \cdots \times \alpha_{n-1}^t \\
 &= -c_i \beta_n
 \end{aligned}$$

Finalmente se expresa el resultado en función de β_n . Entonces $\beta = \beta_n(-c_1 e_1 - c_2 e_2 - \cdots - c_{n-1} e_{n-1} + 1 e_n)$ por lo que basta con que al menos β_n sea distinto de cero para que se cumpla la condición de existencia de la intersección como se quería demostrar. Esto también dice que las entradas donde c_i son cero son las correspondientes a los vectores de línea que son linealmente independientes del vector $\sum^m c_k \alpha_k$, $c_k \neq 0$.

Ahora bien, del sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccccc}
 c_1 \alpha_{11} + & c_2 \alpha_{12} + & \cdots & + c_{n-1} \alpha_{1n-1} & = & \alpha_{1n} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\
 c_1 \alpha_{n1} + & c_2 \alpha_{n2} + & \cdots & + c_{n-1} \alpha_{nn-1} & = & \alpha_{nn}
 \end{array}$$

Expresándolo en su forma vectorial, con los vectores α_k^t y aplicando la condición de existencia de la proposición (2) tenemos que para dos hipotéticos subespacios afines L' y S' cuya diferencia $P - Q = \alpha_n^t$ tenemos que para c_i se cumple la condición si $\eta = \times_{k \neq i}^{n-1} \alpha_k^t \neq 0 \Rightarrow L' \cap S' \neq \emptyset \Leftrightarrow \eta \cdot (c_i \alpha_i^t - \alpha_n^t) = 0$ de donde $\eta \cdot (c_i \alpha_i^t - \alpha_n^t) = 0 \Leftrightarrow c_i = \frac{\eta \cdot \alpha_n^t}{\eta \cdot \alpha_i^t} = (-1)^i \frac{\beta_i}{\beta_n}$.

Para completar la prueba de inducción de la proposición (1) o su replanteamiento debemos demostrar las siguientes propiedades del PV, para después definir el TPE y demostrar su propiedad de ciclo en este espacio, así como las propiedades de los determinantes, definiéndolos a partir del TPE, que se usaron para la demostración

A.2.3. Ortogonalidad del PV en $\mathbb{R}^n$.

Para demostrar que el PV es ortogonal a cada uno de los vectores del hiperplano generado por los subespacios afines interceptados L y S

Tomando dos puntos P_1 y Q_1 sobre L y S respectivamente entonces por la condición anterior se tiene que

$$\begin{aligned} 0 &= \beta \cdot (P_1 - Q_1) \\ &= \beta \cdot (P + s_1\alpha_1 - (Q + s_2\alpha_2 + \dots + s_{n-1}\alpha_{n-1})) \\ &= \beta \cdot (P - Q) + \beta(s_1\alpha_1 - s_2\alpha_2 - \dots - s_{n-1}\alpha_{n-1}) \\ &= 0 + \beta \cdot (s_1\alpha_1 - s_2\alpha_2 - \dots - s_{n-1}\alpha_{n-1}) \end{aligned}$$

en particular para $s_i = 1$ y $s_j = 0 \quad \forall j \neq i$ se cumple que

$$0 = \beta \cdot (P_1 - Q_1) = \beta \cdot 1(\alpha_i) = \beta \cdot \alpha_i \text{ cómo se quería demostrar y, por lo tanto } \beta \cdot$$

$(s_1\alpha_1 + s_2\alpha_2 - \dots + s_{n-1}\alpha_{n-1}) = 0$, es decir, el producto vectorial es ortogonal al hiperplano generado por los subespacios afines L y S interceptados.

A.2.4. Anticommutatividad

Mover las columnas de un determinante como lo hemos definido es aplicar la propiedad de rotación del TPE en conjunto con la propiedad de Anticommutatividad a pares del PV dados por cumplidos en la dimensión $n-1$, por lo que para completar la prueba de la existencia del Producto vectorial en la dimensión n hay que probar esas propiedades en este espacio, entonces para demostrar la segunda vemos que tomando la respectiva en $\mathbb{R}^{n-1}$:

$$\times_{i=1}^{n-1} \alpha_i = \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} e_i D_i = \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} \det[\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}]_i^t e_i$$

Donde vemos que los menores D_i cumplen con la anticommutatividad de ese espacio, entonces

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} \det[\alpha_1 \dots \alpha_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_{n-1}]_i^t e_i &= - \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{1+i} \det[\alpha_1 \dots \alpha_{k+1} \alpha_k \dots \alpha_{n-1}]_i^t e_i \right) \\ &= - \times_{j=1}^{k-1} \alpha_j \times \alpha_{k+1} \times \alpha_k \times_{j=k+2}^{n-1} \alpha_j \end{aligned}$$

A.3. Triple Producto Escalar

Definamos ahora, para completar la demostración, el triple producto escalar en $\mathbb{R}^n$ como:

$$\det[\alpha_n \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}]^t = \alpha_n \cdot \alpha_1 \times \dots \times \alpha_{n-1}$$

Demostraremos la propiedad:

$$\det[\alpha_n \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}]^t = (-1)^{n+1} \det[\alpha_1 \dots \alpha_n]^t$$

desarrollando el determinante del lado izquierdo por la primera fila:

$$\begin{aligned} \det[\alpha_n \alpha_1 \dots \alpha_{n-1}]^t &= \sum_{k=1}^n (-1)^{1+k} \alpha_{nk} \det[\alpha_1 \dots \alpha_{n-1}]_k^t \\ &= (-1)^{1+1} \alpha_{n1} ((-1)^{1+1} \alpha_{12} D_{12} + \dots + (-1)^{1+n-1} \alpha_{1n} D_{1n}) \\ &\quad + (-1)^{1+2} \alpha_{n2} ((-1)^{1+1} \alpha_{11} D_{21} + \dots + (-1)^{1+n-1} \alpha_{1n} D_{2n}) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^{1+n} \alpha_{nn} ((-1)^{1+1} \alpha_{11} D_{n1} + \dots + (-1)^{1+n-1} \alpha_{1n-1} D_{nn-1}) \\ &= (-1)^{1+1} \alpha_{n1} (0 + (-1)^{1+1} \alpha_{12} D_{12} + \dots + (-1)^{1+n-1} \alpha_{1n} D_{1n}) \\ &\quad + (-1)^{1+2} \alpha_{n2} ((-1)^{1+1} \alpha_{11} D_{21} + 0 + \dots + (-1)^{1+n-1} \alpha_{1n} D_{2n}) \\ &\quad \vdots \\ &\quad + (-1)^{1+n} \alpha_{nn} ((-1)^{1+1} \alpha_{11} D_{n1} + (-1)^{1+2} \alpha_{12} D_{n2} + \dots + (-1)^{1+n-1} \alpha_{1n-1} D_{nn-1} + 0) \end{aligned}$$

los subíndices de D_{ij} indican el orden en que son retirados las coordenadas de cada vector, así, para D_{12} se le ha quitado la primera entrada y después la segunda, al revés para D_{21} lo que hace de estos determinantes de orden $n - 2$ iguales salvo por el signo. Sumando por columna y factorizando los α_{1j} . Obsérvese, además, que cada columna debe tener el signo que hay debajo de la diagonal y que la suma por línea debe correr de 1 a $n - 1$, entonces para los elementos de cada columna por arriba de la diagonal se debe agregar un (-1) y por debajo se debe factorizar un (-1) al coeficiente de α_{nk} . Haciendo las compensaciones respectivas resulta,

$$\begin{aligned} &= - \left(\alpha_{11} (-1)^{1+1} \sum_{j \neq 1}^n \alpha_{nj} (-1)^{1+j} D_{j1} + \dots + \alpha_{1n} (-1)^{1+n} \sum_{j \neq n}^n \alpha_{nj} (-1)^{1+j} D_{jn} \right) \\ &= - \sum_1^n \alpha_{1k} (-1)^{1+k} \det[\alpha_n \alpha_2 \dots \alpha_{n-1}]_k^t \end{aligned}$$

Como se supone que se cumple también la regla del ciclo del TPE para el orden $n - 1$, entonces

$$\begin{aligned}
 &= (-1)^{1+n-1+1} \sum_{k=1}^n \alpha_{1k} (-1)^{1+k} \det[\alpha_2 \dots \alpha_n]_k^t \\
 &= (-1)^{1+n} \det[\alpha_1 \dots \alpha_n]^t
 \end{aligned}$$

Expresar un determinante de esta manera, como el TPE, muestra que se duplican la mitad de los menores de orden $n-2$ para todo determinante, lo cual reduce a la mitad el esfuerzo para calcularlo, y dentro de este determinante también los determinantes de orden $(n-2)-2$ se repiten salvo el signo. Con esto se termina la demostración.

3 RESULTADOS

3.1 Sistemas de n ecuaciones con n incógnitas

Como ya se habrá notado, una aplicación inmediata del producto vectorial como se definió es resolver sistemas de ecuaciones de rango completo con coeficientes reales. Expresando estos sistemas como la intersección de los subespacios de dimensiones 1 y $n-1$, esto nos permitió ver que no es necesario repetir n veces la regla de Cramer para hallar las soluciones del sistema de ecuaciones, que, aunado al cálculo del denominador, es calcular $n+1$ determinantes. Sino que basta con uno de ellos en forma del producto vectorial, mientras que el resto de las soluciones se encuentran en cualquiera de las proyecciones del sistema sobre los hiperplanos canónicos, proyecciones que quedan en un rango de $n-1$. De esta forma se puede repetir este proceso hasta encontrar todas las soluciones del sistema original.

3.2 MATRIZ DE ROTACIÓN EN $\mathbb{R}^3$

Sean u_1, u_2 y u_3 tres vectores unitarios, linealmente independientes de este espacio vectorial, cualquier vector v se puede expresar como una combinación lineal de esos vectores, $v = t_1 u_1 + t_2 u_2 + t_3 u_3$, cuya forma matricial es:

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

También se puede ver esa matriz como la matriz asociada a la transformación lineal $U: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, en particular, está representa una rotación si preserva las magnitudes de los vectores, i.e., para un vector v y la norma euclidiana, para este caso, entonces $\|v\| = \|Uv\|$ o $\|v\|^2 = \|Uv\|^2$ o $\|v\| = \|Uv\|$. Pero $\|v\|^2 = v \cdot v = v^t v = v^t I v$, donde I es la matriz identidad. De igual manera $\|Uv\|^2 = (Uv)^t (Uv) = v^t (U^t U) v$, entonces los productos son iguales si se cumple $U^t U = I$ o en forma matricial,

$$\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & u_{31} \\ u_{12} & u_{22} & u_{32} \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \cdot u_1 & u_1 \cdot u_2 & u_1 \cdot u_3 \\ u_2 \cdot u_1 & u_2 \cdot u_2 & u_2 \cdot u_3 \\ u_3 \cdot u_1 & u_3 \cdot u_2 & u_3 \cdot u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

es decir, la transformación es una rotación si los vectores unitarios u_1 , u_2 y u_3 forman un sistema ortogonal de vectores.

Notemos también que $U^t = U^{-1}$, i.e., la matriz inversa de la rotación es su transpuesta, de este modo, los menores para la primera línea la matriz adjunta de U^t son,

$$(U^t)_{11} = \begin{vmatrix} u_{22} & u_{23} \\ u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}, (U^t)_{12} = -\begin{vmatrix} u_{21} & u_{23} \\ u_{31} & u_{33} \end{vmatrix} \text{ y } (U^t)_{13} = \begin{vmatrix} u_{21} & u_{22} \\ u_{31} & u_{32} \end{vmatrix}$$

Que corresponden con las entradas del vector $u_2 \times u_3$, de lo cual resulta que $u_2 \times u_3 = u_1$, ya que $(U^t)^t = U$. Si movemos los índices de la forma $\alpha_{i1} \rightarrow \alpha_{i2} \rightarrow \alpha_{i3} \rightarrow \alpha_{i1}$ para encontrar el resto de los elementos de la adjunta tenemos que $u_3 \times u_1 = u_2$ y $u_1 \times u_2 = u_3$ por lo tanto $Adj(U^t) = U$ y el sistema de vectores forma un sistema derecho de vectores ortonormales.

El determinante del sistema entonces se puede expresar con el triple producto escalar:

$$\begin{aligned} |U| &= u_1 \cdot u_2 \times u_3 = u_2 \cdot u_3 \times u_1 = u_3 \cdot u_1 \times u_2 \\ &= u_1 \cdot u_1 = u_2 \cdot u_2 = u_3 \cdot u_3 = 1 \end{aligned}$$

3.3 VALORES PROPIOS EN $\mathbb{R}^3$

Encontrar los valores propios de una matriz asociada a una suma vectorial de tres vectores equivale a hacer a la combinación lineal y igual al vector t compuesto por las t_i multiplicado por λ , procediendo de esta manera, i.e.,

$$\begin{aligned} t_1 \alpha_1 + t_2 \alpha_2 + t_3 \alpha_3 &= \lambda(t_1, t_2, t_3) = \lambda t_1 e_1 + \lambda t_2 e_2 + \lambda t_3 e_3 \\ &\Leftrightarrow \\ t_1(\alpha_1 - \lambda e_1) + t_2(\alpha_2 - \lambda e_2) + t_3(\alpha_3 - \lambda e_3) &= 0 \\ &\Leftrightarrow \\ t_1(\alpha_1 - \lambda e_1) + t_2 &= -t_3(\alpha_3 - \lambda e_3) \end{aligned}$$

Que es la ecuación vectorial de la intersección de dos rectas con directrices $\alpha_1 - \lambda e_1$ y $\alpha_2 - \lambda e_2$, el sistema tiene solución de acuerdo con la condición (4) de proposición planteada en este trabajo si y sólo si dado

$$\beta = (\alpha_1 - \lambda e_1) \times (\alpha_2 - \lambda e_2) \neq 0$$

Entonces

$$\begin{aligned} -t_3 \beta \cdot (\alpha_3 - \lambda e_3) &= 0 \\ \Leftrightarrow \\ \det[\alpha_1 - \lambda e_1, \alpha_2 - \lambda e_2, \alpha_3 - \lambda e_3]^t &= 0 \\ \Leftrightarrow \\ \begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - \lambda & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} - \lambda \end{vmatrix} &= 0 \end{aligned}$$

donde el determinante es la expresión que ya conocíamos para hallar el polinomio característico del operador asociado a la combinación lineal de los tres vectores y e_i los elementos de la base canónica. Este resultado se generaliza fácilmente a cualquier dimensión finita.

Por ejemplo, para hallar los valores propios de la matriz

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

tomando el producto vectorial de las primeras dos columnas tenemos que

$$\begin{aligned} \beta &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 - \lambda & 2 & 4 \\ 2 & -\lambda & 2 \end{vmatrix} = (4 + 4\lambda, 8 - 6 + 2\lambda, \lambda(\lambda - 3) - 4) \\ &= (4(\lambda + 1), 2(\lambda + 1), (\lambda + 1)(\lambda - 4)) \end{aligned}$$

haciendo el producto punto con el tercer vector el producto debe ser cero, $16(\lambda + 1) + 4(\lambda + 1) + (3 - \lambda)(\lambda + 1)(\lambda - 4) = 0$, claramente $\lambda = -1$ es una raíz del polinomio característico, del resto queda; $(\lambda + 1)(\lambda - 8) = 0$. Así, los otros valores son -1 y 8. Para hallar los vectores propios tomemos la proyección del sistema sobre E_1 .

$$\begin{bmatrix} 2 & -\lambda \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = -t_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 - \lambda \end{bmatrix}$$

Con $\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = -t_3 \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Representa la misma ecuación que de un plano con normal $n = (2,1,2)$, así, los vectores directrices del plano se pueden obtener como, $n_{23} = e_1 \times n = (0, -2, 1)$, $n_{23} \times n = (5, -2, -4)$ son los vectores propios asociados a este valor propio. Para $\lambda = 8$, con la misma proyección se tiene

$$\begin{bmatrix} 2 & -8 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} = -t_3 \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Que arroja el vector característico es $(2,1,2)$. De igual forma para el resto de los subsistemas

3.4 MATRICES TRIDIAGONALES

Las soluciones al sistema de ecuaciones con matriz asociada tridiagonal de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & & & \\ c_2 & a_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ & & & c_n & a_n \end{bmatrix}$$

También se puede resolver por inducción matemática con n mayor o igual a 3, para hallar el vector producto vectorial de las primeras $n - 1$ columnas, cuya representación vectorial es; $\alpha_1 = a_1 e_1 + c_2 e_2$, $\alpha_k = b_{k-1} e_{k-1} + a_k e_k + c_{k+1} e_{k+1}$ y $\alpha_n = b_{n-1} e_{n-1} + a_n e_n$. Definiendo los siguientes factores $d_k = \prod_{j=1}^n c_j$, $d_n = 1 = M_0$, $M_k = M_{k-1} a_k - M_{k-2} b_{k-1} c_k$, $M_1 = a_1$, entonces el producto vectorial es $\beta = \times_{k=1}^{n-1} \alpha_k = \sum_{k=1}^n M_{k-1} d_k E_k$, donde $E_k = \times_{j \neq k}^n e_j = (-1)^{1+k} e_k$, el producto vectorial, ordenado, de los vectores canónicos exceptuando a e_k . Entonces la n -ésima solución viene dado por $t_n = \frac{\sum_{j=1}^n M_{j-1} d_j (-1)^{j+1} y_j}{M_{n-2} d_{n-1} (-1)^n b_{n-1} + M_{n-1} a_n d_n (-1)^{n+1}}$ mientras que el resto de las soluciones viene dado, proyectando el sistema en E_1 , $B_1^t T_n = Y_1 - t_n [A_n]_1$.

Reproduciendo parcialmente [10] pg. 125, donde se propone resolver ecuaciones diferenciales mediante la discretización, por ejemplo, la distribución de temperatura de una varilla unidimensional de longitud 1 que no está sometida a ninguna fuente de calor, y en cuyos extremos existe una temperatura dada por las condiciones de contorno. Si añadimos una fuente de calor sobre la varilla, medida a través de una función $f(x)$, que se supone conocida, el modelo matemático que nos proporciona

cómo se distribuye el calor en la varilla viene dado por: $-u''(x) = f(x), x \in (0,1)$ con $u(0) = \alpha, u(1) = \beta$ (3.8) donde α y β son las condiciones de contorno, que se suponen dadas.

La discretización pasa por considerar un conjunto finito de puntos en el intervalo de partida $(0, 1)$. Lo más habitual consiste en tomar una serie de puntos uniformemente espaciados, que denominamos nodos. Para ello tomamos $n \in \mathbb{N}$ y $h = \frac{1}{n+1}$, el denominado paso de discretización, y creamos los $n + 2$ puntos siguientes del intervalo $(0,1)$: $x_i = ih, 0 \leq i \leq n + 1$. Observemos que $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = 1$. La intención es encontrar los valores de la solución de (3.8) en estos nodos. Por ejemplo, ya sabemos que $u(x_0) = \alpha$ y $u(x_{n+1}) = \beta$, y por tanto nos quedan por encontrar $u(x_i), 1 \leq i \leq n$, es decir, n valores que serán nuestras incógnitas. El siguiente paso consiste en escribir la ecuación $-u''(x) = f(x)$ en función de esos valores. La cuestión es cómo evaluar u'' . Es conocido que el valor de la derivada en un punto x se puede aproximar por cocientes incrementales del tipo:

$$u'(x) \approx \frac{u(x+t) - u(x)}{t} \approx \frac{u(x-t) - u(x)}{t} \approx \frac{u(x+t) - u(x-t)}{2t}$$

y de forma similar se puede obtener una aproximación de la derivada segunda:

$$u''(x) \approx \frac{u(x+t) - 2u(x) + u(x-t)}{t^2}$$

Estas expresiones son más precisas cuanto más pequeño es t . Si ponemos $t = h$ en la última expresión y evaluamos en un nodo x_i ,

$$u''(x_i) \approx \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2}$$

Dado que $u_0 = \alpha, u_{n+1} = \beta$ y $f_i, 1 \leq i \leq n$ son valores conocidos, estamos ante un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas.

$$\begin{array}{rcl} -u_0 + 2u_1 - u_2 & = & h^2 f_1 \\ -u_1 + 2u_2 - u_3 & = & h^2 f_2 \\ \vdots & & \vdots \\ -u_{n-2} + 2u_{n-1} - u_n & = & h^2 f_{n-1} \\ -u_{n-1} + 2u_n - u_{n+1} & = & h^2 f_n \end{array}$$

Que en forma matricial escribimos como

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ & & & \ddots & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f_1 + \alpha/h^2 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_n + \beta/h^2 \end{pmatrix}$$

Termina [10]. Resolviendo como proponemos, tenemos que

$$M_k = M_{k-1}a_k - M_{k-2}b_{k-1}c_k$$

donde en este caso $a_k = 2$, $b_k = c_k = -1$, además $d_k = \prod_{k+1}^n (-1)_k = (-1)^{n-k}$, entonces,

$$\begin{aligned} M_0 &= 1 \\ M_1 &= 2 \\ M_3 &= 2M_2 - (-1)(-1)M_1 = 2 * 3 - 2 = 4 \\ &\vdots \\ M_{n-1} &= 2M_{n-2} - (-1)(-1)M_{n-3} = n \end{aligned}$$

Lo cual es, claramente, la sucesión de los números naturales. Entonces el valor del vector producto vectorial es:

$$\beta = (-1)^{n-1}(-1)^{1+1}e_1 + 2(-1)^{n-2}(-1)^{2+1}e_2 + \dots + n(1)(-1)^{n+1}e_n = (-1)^{n+1}(1, 2, 3, \dots, n)$$

y la solución n-ésima es

$$u_n = \frac{\beta \cdot y}{\beta \cdot \alpha_n} = \frac{\alpha + n\beta}{n+1} + h^2 \frac{\sum_{i=1}^n if_i}{n+1}$$

el resto de las soluciones esta entonces, por ejemplo, en la proyección del sistema en E_n

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -1 & 2 \\ & & & & & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = h^2 \begin{pmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \vdots \\ f_{n-1} \\ f_{n-1}f_n + \beta/h^2 \end{pmatrix} - u_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4 CONCLUSIONES

Como primera conclusión se podría decir, dado que el producto vectorial surge de las condiciones necesarias para que se dé la intersección de dos subespacios de dimensiones 1 y $n - 2$, que el producto vectorial en $\mathbb{R}^n$ es tan común, usual, o natural como lo es el producto punto, así como que no es una operación entre dos, sino de $n - 1$ vectores, al menos en este espacio vectorial y con la norma euclidiana. Como vimos, dada la construcción que hicimos es posible definir un determinante a partir de TPE y no al revés como en otras generalizaciones, entonces podemos demostrar las propiedades de los determinantes mediante las propiedades del producto punto, el producto vectorial y la propiedad de ciclo del TPE. También vimos que todo determinante tiene duplicados la mitad de sus menores de orden $n - 2$, salvo el signo, y estos a su vez tienen la misma característica, lo que recuerda de nuevo una estructura de fractal natural de orden $n-2$. En este sentido vimos que tal vez la mejor forma de calcular un determinante es a través de sus columnas y no de sus filas como se acostumbra.

Aunque se puede hacer un algoritmo que haga los cálculos simultáneamente, lo difícil sería evitar los ceros para no tomar una proyección de los subespacios que tenga determinante cero, en este caso también estaríamos calculando los determinantes en contra de la costumbre. Como vimos en el cambio de base la matriz inversa es el arreglo matricial de la regla de Cramer aplicándola n veces. esto no es nuevo, pero nos recuerda la relación intrínseca entre estos.

Me decidí a escribir este artículo cuando leí en [2] la siguiente conclusión por lo que dice el Dr. Marco Antonio Murray-Lasso; “Dada la íntima relación entre el producto vectorial y los determinantes y la de éstos con los sistemas de ecuaciones lineales simultáneas, seguramente el campo de las aplicaciones del producto vectorial extendido a n dimensiones resultará un campo muy fértil para interpretaciones y aplicaciones novedosas”, conclusión que comparto.

REFERENCIAS

- [1] Hasser, B (2003).: Análisis Matemático, Segunda edición. Trillas.
- [2] Murray, Marco Antonio, Sobre el producto cruz en espacios vectoriales n-dimensionales. Ingeniería. Investigación y Tecnología [en línea] 2004, V (enero-marzo): [Fecha de consulta: 12 de junio de 2019] Disponible en:<<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40450103>> ISSN 1405-7743
- [3] Gonzalez, J.F.H. (2012): El producto vectorial, [Assassinezmoi.files.wordpress.com](https://assassinezmoi.files.wordpress.com/2012/04/producto-vectorial.pdf) <https://assassinezmoi.files.wordpress.com/2012/04/producto-vectorial.pdf>
- [4] Rodríguez M.V. (2003): Álgebra lineal: productos internos y teoremas de estructura, Universidad Nacional Autónoma de México. Escuela Nacional de Estudios Profesionales Acatlán, estado de México, UNAM Escuela Nacional de Estudios Superiores Acatlán.
- [5] Pita, C.R (1995).: Cálculo Vectorial, Primera edición. Prentice Hall.
- [6] Kolman, B. Hill, D.R. (2006).: Álgebra Lineal, Octava edición. Prentice Hall.
- [7] Poole, D. (2011).: Álgebra Lineal. Una introducción moderna, Tercera Edición. México, D.F. Cengage Learning.
- [8] Hoffman, K. y Kunze, R. (1971).: Linear algebra, Second Ed. Englewood Cliffs, New Jersey. Prentice-Hall, Inc.
- [9] Lay, D.C. (2007).: Álgebra lineal y sus aplicaciones, Tercera Edición Actualizada. México. Pearson Educación. [10] Aranda, O.E. (2016).: Álgebra lineal con aplicaciones y Python, Primera edición. Ciudad Real. lulu.com