Estudio de la Respuesta a los Armónicos de un Sistema Masa Resorte: Cuasi-Resonancia

Study of the Harmonic Response of a Spring Mass System: Quasi-Resonance

DOI: 10.46932/sfjdv2n2-068

Received in: March 1st, 2021

Accepted in: May 30th, 2021

J. Agustín Flores Ávila

Maestro en Ciencias

Instituto Tecnológico de la Laguna

Calle Brezo 119 Col. Bellavista

Gómez Palacio, Dgo. México. C. P. 35050

E-mail: Cidde2010@gmail.com

Abel Rodríguez Franco

Maestro en Ciencias

Instituto Tecnológico de la Laguna

Paseo de la Espuela 249, Residencial la Hacienda

Torreón, Coah. Méx. C.P. 27276

E-mail: abel.r.f@hotmail.com

ABSTRACT

Uno de los objetivos que se fijan en la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales en el Tecnológico Nacional de México, es emplearlas en el estudio de los sistemas dinámicos, y uno de los primeros sistemas que se estudian es el Oscilador Mecánico. En este artículo presentamos el análisis de la respuesta de un sistema tal ante los armónicos y, en particular, aquel en el que se presenta la Cuasiresonancia. En un oscilador es imposible que se presente la resonancia, ya que las frecuencias están dadas mediante números irracionales los que, como sabemos, no se pueden igualar. Sin embargo, si se pueden presentar valores muy próximos entre la frecuencia natural del sistema y la frecuencia de la señal de excitación: En este caso se presenta el fenómeno que denominamos “Cuasiresonancia”. Hay múltiples ejemplos en ingeniería de sistemas que se han destruido por esta causa. No obstante que la Cuasiresonancia es deseable en algunos sistemas eléctricos, en general, en los sistemas mecánicos es indeseable por los daños que provoca, por lo que conocer la respuesta de los sistemas en tales circunstancias es fundamental para evitar daños y respuestas no deseadas en los sistemas.

Palabras claves: Ecuaciones Diferenciales; Oscilador Mecánico; Cuasiresonancia; Irracional; Señal de Excitación.

ABSTRACT

One of the objectives set in the teaching of Differential Equations at the Tecnológico Nacional de México, is to use them in the study of dynamic systems, and one of the first systems to be studied is the Mechanical Oscillator. In this article we present the analysis of the response of such a system to harmonics and, in particular, the one in which Quasiresonance is present. In an oscillator it is impossible for resonance to occur, since the frequencies are given by irrational numbers which, as we know, cannot be equalized.

However, very close values between the natural frequency of the system and the frequency of the excitation signal can occur: In this case the phenomenon we call "Quasiresonance" occurs. There are many examples in engineering of systems that have been destroyed by this cause. Although Quasiresonance is desirable in some electrical systems, in general, in mechanical systems it is undesirable because of the damage it causes, so knowing the response of the systems in such circumstances is essential to avoid damage and unwanted responses in the systems.

Keywords: Differential Equations; Mechanical Oscillator; Quasiresonance; Irrational; Excitation Signal.

1 PRESENTACIÓN.

Uno de los primeros sistemas dinámicos que se estudian en las carreras de ingeniería mecánica/mecatrónica es el sistema traslacional masa resorte (M-K), conocido normalmente como oscilador mecánico, y que es un circuito mecánico formado por un resorte anclado uno de sus extremos a un soporte fijo y del otro pende una masa a la que se le aplica una fuerza " $f(t)$ " conocida. (Figura 1).

Figura 1: Gráfica de un Sistema masa-resorte: Un resorte fijo en uno de sus extremos y en el otro una masa a la que se le aplica una fuerza y se deja vibrar libremente.

Esta clase de sistemas tienen un comportamiento particular cuando la frecuencia de la señal de excitación es igual a su frecuencia natural. La frecuencia natural del sistema masa resorte está dada por:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Es decir, la raíz cuadrada del cociente del coeficiente de restitución " k " del resorte y la masa " m ".

Cuando esto sucede, el sistema entra en resonancia y se presenta como una retroalimentación positiva que provoca un incremento sin control de la respuesta. Si es un sistema mecánico, la oscilación aumenta su desplazamiento en forma indefinida, y si es un circuito eléctrico, como una red L-C en serie o en paralelo, se presenta como un incremento sin control de la corriente o el voltaje en el circuito. En cualquier caso, provoca la destrucción del sistema. No obstante que en algunos circuitos eléctricos la

resonancia es buscada de manera intencional, como es el caso de los selectores de canales en equipos de comunicación, en general, en los sistemas mecánicos busca evitarse. Este análisis se aborda en el artículo: Estudio de la Respuesta a los Armónicos de un Sistema Masa Resorte.

El circuito masa resorte se presenta en mecánica como el comportamiento de ciertos elementos mecánicos que están sujetos a tensiones, esfuerzos, presiones, etc, y en función de sus características materiales. Físicamente no existe un resorte, pero en su funcionamiento se hace presente el efecto de un resorte.

Por otro lado, las señales de excitación para esta clase de “circuitos mecánicos” están dadas por las vibraciones mecánicas propias o de otros equipos que estén próximos y que son inherentes a todo dispositivo mecánico. Todo equipo mecánico, en su funcionamiento, genera vibraciones que determinan la “contaminación mecánica” propia de los ambientes industriales.

Por lo anterior, debido a la forma en que se generan los valores de los parámetros del circuito y como se genera la señal de excitación, es altamente improbable que la igualdad entre las frecuencias, natural del sistema y de la señal de excitación, se presente en la práctica. Ambos valores son números irracionales por lo que la igualdad queda cancelada y la resonancia excluida.

Sin embargo, se plantea la siguiente pregunta: Si la igualdad está excluida por ser valores irracionales: ¿Qué sucede si los valores son “muy próximos”?; es decir, sin llegar a ser iguales, la diferencia entre ellas es muy pequeña. Veámoslo a partir del siguiente problema:

2 PROBLEMA.

Determine la función $x(t)$ que nos permite conocer la posición en todo instante de la masa $m = 1$ que está unida a un resorte con $k = 11$, si partiendo del reposo y desde el punto de equilibrio, se le aplica una señal de excitación dada por la función:

$$f(t) := \begin{cases} (2 - t) & \text{if } 0 \leq t \leq 2 \\ f(t - T) & \text{if } t > 2 \end{cases}$$

Función periódica con período $T = 2$ y frecuencia angular $\omega_0 = \pi$.

Nota: Las unidades se encuentran adecuadamente dimensionadas según el sistema en que se trabaje, sea “cgs o mks”.

La gráfica de la función fuerza la mostramos en la Figura 2.

Figura 2: Gráfica de la señal de excitación aplicada al sistema masa resorte en estudio. Señal periódica conocida como diente de sierra con período $T = 2$ y frecuencia angular $\omega_o = \pi$

Dado que es una primera aproximación al estudio de este tipo de sistemas, el problema se encuentra adecuadamente dimensionado para fines didácticos, es decir, para facilitar el aprendizaje.

3 MARCO TEÓRICO.

Las leyes de la física que posibilitan la resolución del problema son:

a).- Segunda ley de Newton.-

En forma simplificada nos dice que al aplicarle a una masa puntual “m” una fuerza $f(t)$ conocida experimenta una aceleración dada por el cociente de la magnitud de la fuerza y el valor de la masa en dirección al vector fuerza.

$$F = ma$$

b).- Ley de Hook.-

En forma simplificada nos dice que la fuerza necesaria para estirar o comprimir un resorte con coeficiente de restitución “k” es directamente proporcional al incremento o decremento de la longitud del resorte.

$$F = kx$$

c).- Principio de D’Alembert.-

En forma simplificada nos dice que la fuerza aplicada a un sistema traslacional se distribuye entre los componentes del sistema según sus propias leyes.

$$F = \sum_{i=1}^n F_i$$

4 PROCESO DE RESOLUCIÓN.

De acuerdo con este principio, la fuerza aplicada al sistema se distribuye entre la masa y el resorte:

$$F(t) = F_m + F_k$$

Donde:

$F(t)$ es la fuerza aplicada al sistema.

$F_m = ma$: Es la fuerza en la masa dada por la segunda Ley de Newton

$F_k = kx$: Es la fuerza en el resorte dada por la Ley de Hooke.

Por lo tanto:

$$F(t) = ma + kx$$

Dado que la aceleración es la segunda derivada con respecto al tiempo del desplazamiento y con los valores que nos proporciona el problema de “ $m = 1$ y $k = 11$ ”, el modelo queda dado por la ecuación diferencial:

$$x''(t) + 11x(t) = f(t)$$

con:

$x(0) = 0$ parte desde la posición de equilibrio y

$x'(0) = 0$ parte del reposo.

La señal de excitación está dada por la función $f(t)$ indicada.

Es una ecuación diferencial ordinaria no homogénea de segundo orden con coeficientes constantes en cuya resolución emplearemos la Transformada de Laplace.

Para resolver la ecuación diferencial necesitamos hacer uso de las Series de Fourier, ya que la señal de excitación presenta puntos de discontinuidad y, por lo tanto, de no derivabilidad en el dominio de definición, específicamente para “ $t = 2n$ ”, por lo que vamos a representar la función de excitación mediante una Serie de Fourier que, como sabemos, es una suma infinita de términos cosenoidales que son

derivables en todos los reales, y a esta serie igualamos la ecuación diferencial al momento de resolverla.
¡¡Veámoslo!!.

5 SERIE DE FOURIER.

a).- Obtenemos la serie de Fourier de nuestra función de excitación determinando los coeficientes de Fourier.

$$\frac{2}{2} \cdot \int_0^2 (2 - t) dt \rightarrow 2$$

$$A_0 = 2$$

$$\frac{2}{2} \cdot \int_0^2 (2 - t) \cdot \cos(n \cdot \pi \cdot t) dt \rightarrow \frac{2 \cdot \sin(\pi \cdot n)^2}{\pi^2 \cdot n^2}$$

$$A_n = 0$$

$$\frac{2}{2} \cdot \int_0^2 (2 - t) \cdot \sin(n \cdot \pi \cdot t) dt \rightarrow -\frac{\sin(2 \cdot \pi \cdot n) - 2 \cdot \pi \cdot n}{\pi^2 \cdot n^2}$$

Sabemos que para todo “n” entero se cumple que:

$$\sin(n\pi) = 0 \quad \text{y} \quad \cos(n\pi) = (-1)^n$$

Por lo tanto:

$$B(n) := \frac{2}{\pi \cdot n}$$

Definimos el coeficiente de Fourier Bn en términos de:

$$B(n) := \frac{2}{n \cdot \pi}$$

Y la serie de Fourier queda dada por:

$$f_s(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (B(n) \cdot \sin(n \cdot \pi \cdot t))$$

La gráfica de la serie la mostramos en la Figura 3 tomando 10 términos de la misma.

$$f_s(t) := 1 + \sum_{n=1}^{10} (B(n) \cdot \sin(n \cdot \pi \cdot t))$$

Figura 3: Gráfica de la señal de excitación aplicada al sistema masa resorte en estudio expresada mediante los primeros diez términos de la Serie de Fourier.

En la figura 4 mostramos las gráficas de la función original y la de la serie tomando en cada caso 10 términos de las sumatorias.

Figura No. 4: Gráficas sobrepuestas de la señal de excitación original y la representación alterna de la misma función mediante los primeros diez términos de la Serie de Fourier.

Como podemos observar, la gráfica es semejante a la gráfica de la función original; esta semejanza se acentúa si tomamos más términos en la serie.

6 RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL.

De esta manera tenemos la señal de excitación modelada mediante una serie que es derivable en todo el dominio, por lo tanto, la ecuación diferencial a resolver queda expresada en los siguientes términos:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 11 \cdot x(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (B(n) \cdot \sin(n \cdot \pi \cdot t))$$

Resolvemos la ecuación, empleando, como ya lo señalamos, la Transformada de Laplace.

Con condiciones iniciales cero la transformada queda dada por:

$$s^2 \cdot X(s) + 11 \cdot X(s) = \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(B(n) \cdot \frac{n \cdot \pi}{s^2 + n^2 \cdot \pi^2} \right)$$

Factorizamos la X(s):

$$X(s) \cdot (s^2 + 11) = \frac{1}{s} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(B(n) \cdot \frac{n \cdot \pi}{s^2 + n^2 \cdot \pi^2} \right)$$

Despejamos la X(s):

$$X(s) = \frac{1}{s \cdot (s^2 + 11)} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[B(n) \cdot \frac{n \cdot \pi}{(s^2 + n^2 \cdot \pi^2) \cdot (s^2 + 11)} \right]$$

La transformada inversa de X(s) es la x(t) buscada y que nos proporciona la posición de la masa en todo instante. Empleando el Math-Cad obtenemos la Transformada Inversa de Laplace:

Primera parte:

$$\frac{1}{s \cdot (s^2 + 11)} \text{ invlaplace } \rightarrow \frac{1}{11} - \frac{\cos(\sqrt{11} \cdot t)}{11}$$

Sumatoria:

$$\frac{n \cdot \pi}{s^2 + n^2 \cdot \pi^2} \cdot \frac{1}{s^2 + 11} \text{ invlaplace } \rightarrow -\frac{\sqrt{11} \cdot n \cdot (\sqrt{11} \cdot \sin(\pi \cdot t \cdot \sqrt{n^2}) - \pi \cdot \sin(\sqrt{11} \cdot t) \cdot \sqrt{n^2})}{11 \cdot \sqrt{n^2} \cdot (\pi^2 \cdot n^2 - 11)}$$

Simplificamos esta última:

$$-\frac{\sqrt{11} \cdot (\sqrt{11} \cdot \sin(n \cdot \pi \cdot t) - n \cdot \pi \cdot \sin(\sqrt{11} \cdot t))}{11 \cdot (\pi^2 \cdot n^2 - 11)}$$

Y la posición $x(t)$ de la masa queda dada por la serie:

$$x(t) = \frac{1}{11} - \frac{\cos(\sqrt{11} \cdot t)}{11} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[B(n) \cdot \left[-\frac{\sqrt{11} \cdot (\sqrt{11} \cdot \sin(n \cdot \pi \cdot t) - n \cdot \pi \cdot \sin(\sqrt{11} \cdot t))}{11 \cdot (\pi^2 \cdot n^2 - 11)} \right] \right]$$

La gráfica de la función posición $x(t)$ tomando diez términos de la serie la mostramos en la Figura 5.

$$x(t) := \frac{1}{11} - \frac{\cos(\sqrt{11} \cdot t)}{11} - \sum_{n=1}^{10} \left[B(n) \cdot \left[\frac{\sqrt{11} \cdot n \cdot (\sqrt{11} \cdot \sin(\pi \cdot t \cdot \sqrt{n^2}) - \pi \cdot \sin(\sqrt{11} \cdot t) \cdot \sqrt{n^2})}{11 \cdot \sqrt{n^2} \cdot (\pi^2 \cdot n^2 - 11)} \right] \right]$$

7 COMENTARIO

Dado que las frecuencias -natural del sistema y de la señal de excitación-, son diferentes, no se presenta la resonancia; Como podemos observar en la solución analítica, los términos $\sqrt{11}$ y $n \pi$, nunca pueden ser iguales ya que ambos son irracionales, sin embargo, para $n = 1$, primer armónico o frecuencia fundamental, tenemos que sus valores son muy próximos, así:

$$\sqrt{11} - \pi = 0.175$$

La diferencia entre estos valores es “pequeña”. Ante esta situación, que llamaremos “cuasi resonancia”, la respuesta del sistema es la de una señal modulada en amplitud; es decir, una frecuencia “central” cuya amplitud es “modulada” por una senoide adicional con frecuencia particular.

Esta situación sólo se presenta para “ $n = 1$ ”, puesto que para valores superiores la diferencia se incrementa, como podemos observar en la siguiente tabla:

$$n := 1..10$$

$$df(n) := n \cdot \pi - \sqrt{11}$$

n =	df(n) =
1	-0.175
2	2.967
3	6.108
4	9.25
5	12.391
6	15.533
7	18.675
8	21.816
9	24.958
10	28.099

Y el efecto “modulación en amplitud”, es mínimo o desaparece

Para efectos del funcionamiento de un sistema, que su respuesta varíe en amplitud, es una situación que debe evitarse en los sistemas mecánicos, en los que lo deseable es tener un comportamiento regular, tanto en frecuencia como en amplitud, para efectos de control.

8 CUASI RESONANCIA.

Un sistema opera en estado de “cuasi resonancia” cuando la frecuencia de la señal de excitación tiene un valor “muy próximo” a la frecuencia natural del sistema y es un efecto que se debe evitar por dar lugar a una respuesta “modulada en amplitud”.

9 ANÁLISIS AL PRIMER ARMÓNICO.

Para este caso la ecuación diferencial que modela el sistema viene dada como:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 11 \cdot x(t) = \left(\frac{2}{\pi} \cdot \sin(n \cdot \pi \cdot t) \right)$$

Ya que el Coeficiente de Fourier para $n = 1$ es:

$$B(1) = \frac{2}{\pi}$$

Con condiciones iniciales cero la transformada queda dada por:

$$s^2 \cdot X(s) + 11 \cdot X(s) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{s^2 + \pi^2}$$

Factorizamos $X(s)$ y despejamos:

$$X(s) = \left(\frac{2}{\pi} \right) \cdot \frac{\pi}{(s^2 + \pi^2) \cdot (s^2 + 11)}$$

Obtenemos la inversa de Laplace.

$$\frac{\pi}{(s^2 + \pi^2) \cdot (s^2 + 11)} \xrightarrow{\text{invlaplace}} -\frac{11 \cdot \sin(\pi \cdot t) - \pi \cdot \sqrt{11} \cdot \sin(\sqrt{11} \cdot t)}{11 \cdot \pi^2 - 121}$$

Y la función posición $x(t)$ es:

$$x(t) := \left[\left(\frac{2}{\pi} \right) \cdot \frac{11 \cdot \sin(\pi \cdot t) - \pi \cdot \sqrt{11} \cdot \sin(\sqrt{11} \cdot t)}{11 \cdot \pi^2 - 121} \right]$$

La gráfica correspondiente está en la Figura 6.

Figura 6: Gráfica de la respuesta del sistema al primer armónico que es el que origina la cuasiresonancia: La oscilación va incrementando su amplitud en forma controlada provocando riesgos de destrucción del sistema.

10 ANÁLISIS AL SEGUNDO ARMÓNICO.

Para este caso la ecuación diferencial que modela el sistema viene dada como:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) + 11 \cdot x(t) = \frac{1}{\pi} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t)$$

Ya que el Coeficiente de Fourier para $n = 2$ es:

$$B(2) \rightarrow$$

Con condiciones iniciales cero la transformada queda dada por:

$$s^2 \cdot X(s) + 11 \cdot X(s) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{s^2 + 4 \cdot \pi^2}$$

Factorizamos $X(s)$ y despejamos:

$$X(s) = \left[\frac{1}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{(s^2 + 4 \cdot \pi^2) \cdot (s^2 + 11)} \right]$$

Obtenemos la inversa de Laplace.

$$\left[\frac{1}{\pi} \cdot \frac{2 \cdot \pi}{(s^2 + 4 \cdot \pi^2) \cdot (s^2 + 11)} \right] \text{invlaplace} \rightarrow -\frac{11 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) - 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{11} \cdot \sin(\sqrt{11} \cdot t)}{44 \cdot \pi^3 - 121 \cdot \pi}$$

Y la función posición $x(t)$ es:

$$x(t) := -\frac{11 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot t) - 2 \cdot \pi \cdot \sqrt{11} \cdot \sin(\sqrt{11} \cdot t)}{44 \cdot \pi^3 - 121 \cdot \pi}$$

La gráfica correspondiente está en la Figura 7.

Figura 7: Gráfica de la respuesta del sistema al segundo armónico que también contribuye, aunque en menor grado a la cuasiresonancia: La oscilación va incrementando su amplitud en forma controlada provocando riesgos de destrucción del sistema.

El problema se soluciona evitando que los armónicos que generan este comportamiento irregular pasen al sistema; esto lo logramos mediante filtros adecuadamente dimensionados para enviar las señales de frecuencias indeseables a tierra. En este caso filtramos las frecuencias para “n = 1 y 2”, y estos componentes no aparecen en la respuesta final que queda dada por:

$$x(t) := \left[\frac{1}{11} - \frac{\cos(\sqrt{11} \cdot t)}{11} + \sum_{n=3}^{10} \left[B(n) \cdot \left[-\frac{\sqrt{11} \cdot (\sqrt{11} \cdot \sin(n \cdot \pi \cdot t) - n \cdot \pi \cdot \sin(\sqrt{11} \cdot t))}{11 \cdot (\pi^2 \cdot n^2 - 11)} \right] \right] \right]$$

La gráfica la mostramos en la figura 8

Figura 8: Gráfica de la respuesta correcta del sistema. Excluimos los dos primeros armónicos: “n = 1 y n = 2” y así la sumatoria inicia en “n = 3” desapareciendo el efecto de cuasiresonancia.

11 CONCLUSIONES.

Durante el curso se hace hincapié en que una ecuación diferencial es el modelo matemático de un problema en el que está presente el cambio, y que al resolver la ecuación podemos conocer el sistema, es decir, describir su comportamiento en todo instante y, así conocer el comportamiento futuro, para si existe un comportamiento no deseado, realizar las acciones de corrección correspondientes. Conocer la respuesta de un sistema a los armónicos posibilita evitar acciones destructivas como lo mostramos en este ejemplo.

BIBLIOGRAFÍA

1. Quintero R., Ursini, S. (1988). Desde el enfoque tutorial hacia el uso constructivista de la computadora en el aula; Reporte de investigación; Cinvestav, México.
2. Koyré, Alexandre. Estudios de Historia del Pensamiento Científico. México: Edit. Siglo XXI.
3. Cheng, K. D. (1959). Analysis of Linear System. Tokio, Japan: Edit. Addison-Wesley.
4. Symon, R. Keith. (1968). Mecánica. Madrid, España. Edit. Aguilar.
5. Zill Dennis G. (2009). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado (9ª. Ed.). México. Cengage Learning.
6. Zill. (2009). Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. (7ª. Ed.). México. Cengage Learning.
7. Hsu, H. P. (1973). Análisis de Fourier. México. Edit. Addison-Wesley Iberoamericana., 1987. 4ª Edición.
8. Courant, R. & Robbins, R. (1979). ¿Qué es la Matemática?. New Rochelle, N. Y. Aguilar Ediciones.
9. Beisser, A. (1965). Conceptos de Física Moderna. Madrid, España. Ediciones del Castillo, S. A.
10. Polya, George. (1976). Mathematical Methods In Science. New York. Leon Bowden Edit..
11. Meriam, J. L. Zill. (1991). Dinámica. Buenos Aires, Argentina. Editorial Reverté, S. A.
12. Rainville, E. (2009). Ecuaciones Diferenciales Elementales. (2ª. Ed.). México. Trillas.
13. Flores A, J. A. (2017). Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. En prensa.